"Czterowyrazowy ciąg (a, b, c, d) jest rosnący i arytmetyczny. Kwadrat największego wyrazu tego ciągu jest równy podwojonej sumie kwadratów pozostałych wyrazów tego ciągu.
Ponadto ciąg (a + 100, b, c) jest geometryczny. Oblicz wyrazy ciągu (a, b, c, d)."

Ciąg (a, b, c, d) jest arytmetyczny o różnicy $r>0$. Korzystając z wzoru na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego możemy wyznaczyć kolejne wyrazy uzależniając je od pierwszego wyrazu oraz różnicy.

$a_1 = a$ więc $b = a + r$, $c = a + 2r$, $d = a + 3r$

Kwadrat największego wyrazu tego ciągu jest równy podwojonej sumie kwadratów pozostałych wyrazów tego ciągu. Zapisując ten tekst algebraicznie otrzymujemy:

$d^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2)$

- podstawiamy rozpisane wyrazy ciągu arytmetycznego i próbujemy uprościć i zredukować

$(a + 3r)^2 = 2(a^2 + (a + r)^2 + (a + 2r)^2)$

$a^2 + 6ar + 9r^2 = 2(a^2 + a^2 + 2ar + r^2 + a^2 + 4ar + 4r^2)$

$a^2 + 6ar + 9r^2 = 2(3a^2 + 6ar + 5r^2)$

$a^2 + 6ar + 9r^2 = 6a^2 + 12ar + 10r^2$

$-5a^2 - 6ar - r^2 = 0 \quad / \cdot (-1)$

$5a^2 + 6ar + r^2 = 0$

Ciąg (a + 100, b, c) jest geometryczny. Korzystając ze wzoru między sąsiednimi wyrazami ciągu tworzymy równanie:

$b^2 = (a + 100)c$

- podstawiamy rozpisane z wzoru wyrazy ciągu i wyliczamy a, żeby podstawić do wyliczonego wcześniej równania,

$(a + r)^2 = (a + 100)(a + 2r)$

$a^2 + 2ar + r^2 = a^2 + 2ar + 100a + 200r$

$r^2 = 100a + 200r$

$100a = r^2 - 200r \quad / : 100$

$a = \frac{1}{100} r^2 - 2r$

$a = r(\frac{1}{100} r - 2)$

Tworzymy układ równań, a następnie rozwiązujemy.

$$\begin{cases} 5a^2 + 6ar + r^2 \\ a = r(\frac{1}{100}r\text{-}2) \end{cases}$$

$$5a^2 + 6ar + r^2 = 0$$

$$5\left(r\left(\frac{1}{100}r\text{-}2\right)\right)^2 + 6r \cdot r(\frac{1}{100}r\text{-}2) + r^2 = 0$$

$$5r^2\left(\frac{1}{100}r\text{-}2\right)^2 + 6r^2(\frac{1}{100}r\text{-}2) + r^2 = 0 \;/: r^2$$

$$5\left(\frac{1}{100}r\text{-}2\right)^2 + 6(\frac{1}{100}r\text{-}2) + 1 = 0$$

$$5\left(\frac{1}{10000}r^2\text{-}\frac{4}{100}r + 4\right) + \frac{6}{100}r\text{-}12 + 1 = 0$$

$$\frac{5}{10000}r^2\text{-}\frac{20}{100}r + 20 + \frac{6}{100}r\text{-}11 = 0$$

$$\frac{5}{10000}r^2\text{-}\frac{14}{100}r + 9 = 0 \;/ \cdot 10000$$

$$5r^2 \text{-}1400 + 90000 = 0 \;/: 5$$

$$r^2 \text{-}280r + 18000 = 0$$

Kolejnym etapem jest rozwiązanie funkcji kwadratowej oraz wyliczenie pierwiastków równania.

$$\Delta = 280^2\text{-}4 \cdot 1 \cdot 18000 = 6400$$

$$\sqrt{\Delta} = 80$$

$$\begin{cases} r_1 = \dfrac{\text{-}(-280)\text{-}80}{2 \cdot 1} = \dfrac{200}{2} = 100 \\ r_2 = \dfrac{\text{-}(-280) + 80}{2 \cdot 1} = \dfrac{360}{2} = 180 \end{cases}$$

Następnym krokiem jest wyliczenie „a” dla każdego z wyliczonych „r”.

$$\begin{cases} a_1 = 100\left(\frac{1}{100} \cdot 100 - 2\right) = -100 \\ a_2 = 180\left(\frac{1}{100} \cdot 180 - 2\right) = \text{-}36 \end{cases}$$

Podstawiamy wyliczone $a_1 = -100$ oraz $r_1 = 100$ do wytycznych z polecenia (a, b, c, d) i sprawdzamy czy otrzymane liczby tworzą ciąg geometryczny.

(a, b, c, d) = (-100, 0, 100, 200)

(a+100, b, c) = (0, 0, 100)

Z definicji ciągu (wyliczając iloraz) możemy zauważyć, że nie jest to ciąg geometryczny.

$\frac{a_3}{a_2} = \frac{100}{0}$ - symbol nieoznaczny

Rozwiązanie (-100, 0, 100, 200) odrzucamy.

Następnie czynność powtarzamy dla $a_2 = -36$ oraz $r_2 = 180$.

(a, b, c, d) = (-36, 144, 324, 504)

(a+100, b, c) = (64, 144, 324)

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{324}{144} = 2{,}25$$

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{144}{64} = 2{,}25$$

Ciąg (64, 144, 324) jest geometryczny.

Odpowiedz: (a, b, c, d) = (-36, 144, 324, 504)