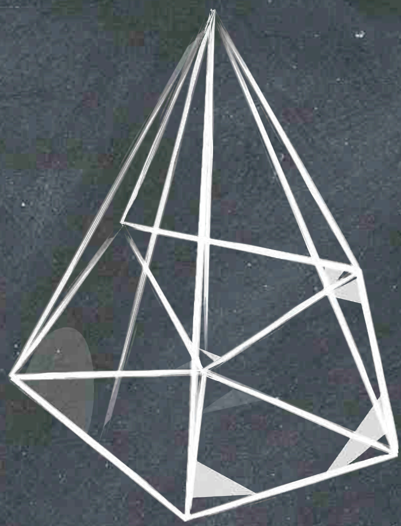
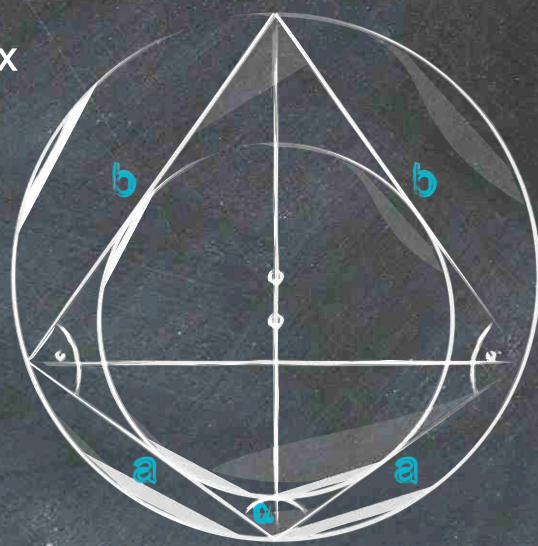
ZESTAW WZORÓW DO EGZAMINU MATURALNEGO





MEGAMATMA®

WYDAWNICTWO MEGAWIEDZA SP. Z O.O.

Wydawca: MegaWiedza sp. z o.o.
e-mail: biuro@megamatma.pl
Redakcja Merytoryczna: dr Alicja Molęda

MegaMatma.pl® jest serwisem firmy Megawiedza Sp. z o.o., Dobroń 95-082, ul. Zakrzewki 21a, NIP: 731 201 22 93, Regon 100772001,
Sąd Rejonowy w Łodzi, XX Wydział Krajowego Rejestru Sądowego, KRS 0000340315, kapitał zakładowy 33.000zł

ISBN 978-83-63410-15-5

PRAWA DZIAŁAŃ NA LICZBACH

Wartość bezwzględna

odległość liczby a od 0

$|a|$

$|a-b| = |AB|$

$$|a| \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} a & dla \;\; a \geq 0 \\ -a & dla \;\; a < 0 \end{cases}$$

$|4-\sqrt{7}| = 4-\sqrt{7}, \;\; |0| = 0, \;\; |2-\pi| = \pi - 2$

własności, gdy $a, b \in R, \; r \geq 0$

$|a| \geq 0$

$|x| > 0 \Leftrightarrow x \in R\backslash\{0\}$

$|a| = |-a|$

$|\sqrt{3}| = |-\sqrt{3}|$

$|a| = \sqrt{a^2}$

$\sqrt{(x-2)^2} = 4 \Leftrightarrow |x-2| = 4$

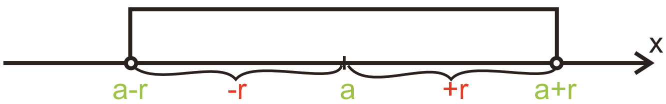
$|a| = r \;\Leftrightarrow\; a = r$ lub $a = -r$

$|x-2| = 4 \;\Leftrightarrow\; x-2 = 4$ lub $x-2 = -4$

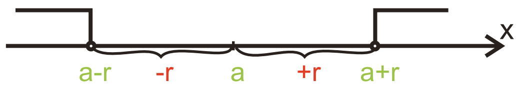
$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

$\frac{|xy|}{x^2} = \frac{|xy|}{|x|^2} = \frac{|xy|}{|x|} \cdot \frac{1}{|x|} = \left|\frac{xy}{x}\right| \cdot \frac{1}{|x|} = |y| \cdot \frac{1}{|x|} = \frac{|y|}{|x|} = \left|\frac{y}{x}\right|, \;\; x \neq 0$

$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, \;\; b \neq 0$



$|x-a| < r$



$|x-a| > r$

szacowanie, gdy $a, b \in R$

$|a+b| \leq |a| + |b|$

Dla $a = 2 > 0$ i $b = -3 < 0, a+b < 0$ i

$|a-b| \geq \big||a| - |b|\big|$

$|a+b| = -a-b < a + (-b) = |a| + |b|$

nierówności, gdy $a \geq 0$

$|x| \leq \sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow -\sqrt{2} + 1 \leq x \leq \sqrt{2} - 1$

$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$

$|-x+1| \geq 1 \Leftrightarrow -x+1 \geq 1$ lub $-x+1 \leq -1$

$|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a$ lub $x \leq -a$

BŁĘDY PRZYBLIŻENIA

Dla liczby $a \in R$ i $a \neq 0$ oraz jej przybliżenia dziesiętnego a_0

błąd bezwzględny przybliżenia

$|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a_0}|$

błąd względny przybliżenia

$\frac{|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a_0}|}{\boldsymbol{a}}$

Dla $a = 40075{,}36852$,
gdy $a_0 = 40075{,}37$

$|a - a_0| = 0{,}00148 < 0{,}01$

$\frac{|a-a_0|}{a} = 3{,}6 \cdot 10^{-8}$

SZACOWANIE

Dla $a, b, c \in R_+$
oszacowanie z góry

$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} < \frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{b}}$

oszacowanie z dołu

$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} > \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}$

$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} < \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}}$ i $\boldsymbol{c} < b$, $\frac{8\sqrt{78}}{13} < \frac{8\sqrt{81}}{12} = 6$

$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} > \frac{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{b}}$ i $\boldsymbol{c} < a$, $\frac{8\sqrt{78}}{13} > \frac{8\sqrt{64}}{16} = 4$

PIERWIASTKI

Dla $a \geq 0, b \geq 0$ i $m, n \in N \backslash \{0,1\}$ własności

$\sqrt[n]{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}} = \sqrt[n]{\boldsymbol{a}} \cdot \sqrt[n]{\boldsymbol{b}}$ $\qquad \sqrt[3]{0{,}125 \cdot 0{,}008} = \sqrt[3]{0{,}125} \cdot \sqrt[3]{0{,}008} = 0{,}1$

$\sqrt[n]{\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}} = \frac{\sqrt[n]{\boldsymbol{a}}}{\sqrt[n]{\boldsymbol{b}}}$, dla $b \neq 0$ $\qquad \sqrt[3]{\frac{4}{0{,}032}} = \sqrt[3]{\frac{8}{0{,}064}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{0{,}064}} = \frac{2}{0{,}4}$

$\sqrt[n]{\sqrt[m]{\boldsymbol{a}}} = \sqrt[n \cdot m]{\boldsymbol{a}}$ $\qquad \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[5]{2^7}}} = \sqrt[30]{2^7}$

$\left(\sqrt[n]{\boldsymbol{a}}\right)^{\boldsymbol{m}} = \sqrt[n]{\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{m}}}$ $\qquad \sqrt{3^3} = (\sqrt{3})^3 = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

$\sqrt[n]{\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{b}} = \boldsymbol{a} \cdot \sqrt[n]{\boldsymbol{b}}$ $\qquad \sqrt[10]{10240} = \sqrt[10]{1024 \cdot 10} = 2\sqrt[10]{10}$

$\left(\sqrt[n]{\boldsymbol{a}}\right)^{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{a}$ $\qquad \left(\sqrt{\sqrt[3]{2}}\right)^6 = \left(\sqrt[6]{2}\right)^6 = 2$

Dla $a \in R$ i $n \in N \backslash \{0,1\}$

$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a|, \text{ gdy } n \text{ jest liczbą parzystą} \\ a, \text{ gdy } n \text{ jest liczbą nieparzystą} \end{cases}$

$\sqrt{(-8)^2} = |-8| = 8$, $\sqrt{x^2} = |x|$

$\sqrt[5]{(-4)^5} = -4$, $\sqrt[3]{x^3} = x$

o wykładniku zero i podstawie $a \in R\setminus\{0\}$

$\boldsymbol{a^0 = 1}$ $\qquad$ $\boldsymbol{0^0}$ nie istnieje

n – ta potęga, $a \in R$ i $n \in N_+$

$\boldsymbol{a^1 = a}$ i $\boldsymbol{a^{n+1} = a^n \cdot a}$ $\qquad$ $\boldsymbol{a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ czynników}}}$

o wykładniku ujemnym, $a \in R\setminus\{0\},\ n \in N_+$

$\boldsymbol{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$ $\qquad$ $12^{-3} = \frac{1}{12^3}$

$\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n}$ o ile $a \cdot b \neq 0$ $\qquad$ $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \left(\frac{1}{5}\right)^2,\quad \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2}$

o wykładniku wymiernym, $a \geq 0,\ m,n \in N_+,\ n \neq 1$

$\boldsymbol{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$ $\qquad$ $\boldsymbol{a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}}$, $\quad 3^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Dla $a, b \in R\setminus\{0\}$ i $\alpha, \beta \in C$ albo $a, b \in R_+$ i $\alpha, \beta \in R$

takie same wykładniki potęg

$\boldsymbol{(a \cdot b)^\alpha = a^\alpha \cdot b^\alpha}$ $\qquad$ $4^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(4 \cdot \frac{1}{2}\right)^3 = (2)^3$

$\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}}$ $\qquad$ $\left(\frac{6}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{6^2}{\sqrt{3}^2} = \frac{36}{3}$

potęga potęgi

$\boldsymbol{(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha \cdot \beta}}$ $\qquad$ $\left(\left(\sqrt{5}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{5}\right)^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \left(\sqrt{5}\right)^2$

takie same podstawy potęg

$\boldsymbol{a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}}$ $\qquad$ $2^x \cdot 2^{1-x} = 2^{x+1-x} = 2^1$

$\boldsymbol{\frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}}$ $\qquad$ $\frac{y^2}{y^{-3}} = y^{2-(-3)} = y^5,\ \ y \neq 0$

Dla $a > 0$ i $a \neq 1$, $b > 0$, $c, k \in R$, $x > 0, y > 0$

$\boldsymbol{log_a b = c \overset{def}{\Leftrightarrow} a^c = b}$ $log_8 2 = \frac{1}{3}$, bo $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$

$\boldsymbol{log_a a^k = k}$, $\boldsymbol{log_{a^k} a = \frac{1}{k}}$, $k \neq 0$ $\boldsymbol{log_a a = 1}$, $\boldsymbol{log_a \frac{1}{a} = -1}$, $\boldsymbol{log_a 1 = 0}$

---

logarytm potęgi

$\boldsymbol{log_a b^k = k \cdot log_a b}$ $log 10^{5-k} = 5 - k$, bo $log 10 = log_{10} 10$

---

logarytm iloczynu

$\boldsymbol{log_a (x \cdot y) = log_a x + log_a y}$ $log_8 2 + log_8 32 = log_8 (2 \cdot 32)$

---

logarytm ilorazu

$\boldsymbol{log_a \frac{x}{y} = log_a x - log_a y}$ $log \frac{10^5}{10^k} = log 10^5 - log 10^k$

---

zamiana podstaw

$\boldsymbol{log_a b = \frac{log_c b}{log_c a}}$, $c > 0$ i $c \neq 1$ $\boldsymbol{log_a c = \frac{1}{log_c a}}$, $\boldsymbol{log_a b = -log_{\frac{1}{a}} b}$

Wzory skróconego mnożenia

kwadrat różnicy

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$

$(x-\frac{1}{x})^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2, \quad x \neq 0$

kwadrat sumy

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$

$107^2 = (100+7)^2 = 100^2 + 2\cdot 100 \cdot 7 + 7^2$

różnica kwadratów

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

$86 \cdot 94 = (90-4)(90+4) = 90^2 - 4^2$

kwadrat sumy trzech składników

$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

$(1+x-\frac{1}{x})^2 = 1 + x^2 + \frac{1}{x^2} + 2x - \frac{2}{x} - 2 =$

$= x^2 + \frac{1}{x^2} + 2x - \frac{2}{x} - 1, \quad x \neq 0$

sześcian sumy

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(\sqrt{3}+1)^3 = (\sqrt{3})^3 + 3(\sqrt{3})^2 + 3\sqrt{3} + 1 =$

$= 6\sqrt{3} + 10$

sześcian różnicy

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$(\sqrt{3}-1)^3 = (\sqrt{3})^3 - 3(\sqrt{3})^2 + 3\sqrt{3} - 1 =$

$= 6\sqrt{3} - 10$

suma sześcianów

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$(x+1)(x^2 - x + 1) = x^3 + 1$

różnica sześcianów

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$k^3 - \left(\frac{1}{k}\right)^3 = \left(k - \frac{1}{k}\right)[k^2 + 1 + \left(\frac{1}{k}\right)^2]$

(R) Wzór na $a^n - 1$

$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a + 1), \quad n \in N_+$

$1 - q^4 = (1-q)(1 + q + q^2 + q^3)$

Usuwanie niewymierności

$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}, \quad a > 0$ $\qquad \frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{5\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

$\frac{1}{\sqrt[3]{a}} = \frac{\sqrt[3]{a^2}}{a}$ lub $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{a}, \quad a \neq 0$ $\qquad \frac{1000}{\sqrt[3]{100}} = \frac{1000\sqrt[3]{10}}{10} = 100\sqrt[3]{10}$

Dla $a, b \in R_+$ i $a \neq b$ ze wzoru na różnicę kwadratów

$\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$ $\qquad \frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{5-3} = \sqrt{5} + \sqrt{3}$

$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$ $\qquad \frac{1}{4+\sqrt{12}} = \frac{4-\sqrt{12}}{16-12} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$

Dla $a, b \in R$ i $a \neq b$ ze wzoru na różnicę lub sumę sześcianów

$\frac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}} = \frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{a-b}$ lub $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}} = \frac{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}{a-b}$ $\qquad \frac{1}{\sqrt[3]{4}-1} = \frac{\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{4}+1}{4-1}$

$\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}} = \frac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{a+b}$ lub $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}} = \frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}{a-b}$ $\qquad \frac{11}{\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{5}} = \frac{11\left(\sqrt[3]{36}-\sqrt[3]{30}+\sqrt[3]{25}\right)}{6+5} = \sqrt[3]{36} - \sqrt[3]{30} + \sqrt[3]{25}$

FUNKCJA KWADRATOWA (TRÓJMIAN)

Postać ogólna

$\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}, \quad a \neq 0$

Wykres $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ jest parabolą o ramionach narysowanych: do góry, gdy $a > 0$ lub do dołu, gdy $a < 0$

---

wyróżnik trójmianu

$\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac}$

Dla $f(x) = 2x^2 - x + 1$ $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1$

Gdy $\Delta > 0$

2 miejsca zerowe

$\boldsymbol{f(x) = 0}$

2 pierwiastki trójmianu lub równania kwadratowego

$\boldsymbol{x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}} \qquad \boldsymbol{x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}$

$-x^2 + 2x + 3 = 0 \qquad \boldsymbol{\Delta} = 16 \qquad \sqrt{\boldsymbol{\Delta}} = 4$

$x_1 = \frac{-2-4}{2\cdot(-1)} = 3, \qquad x_2 = \frac{-2+4}{2\cdot(-1)} = -1$

Gdy $\boldsymbol{\Delta} = 0$

1 miejsce zerowe

$\boldsymbol{f(x) = 0}$

1 pierwiastek

$\boldsymbol{x_0 = -\frac{b}{2a}}$

$-2x^2 + 2\sqrt{2}x - 1 = 0 \quad \boldsymbol{\Delta} = 0 \quad x_0 = -\frac{2\sqrt{2}}{2\cdot(-2)} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Gdy $\boldsymbol{\Delta} < 0$

brak pierwiastka (brak miejsca zerowego)

$x^2 + 10x + 100 \quad \boldsymbol{\Delta} = 10^2 - 4 \cdot 100 < 0$

Postać kanoniczna

$\boldsymbol{f(x) = a(x-p)^2 + q}\,, \quad a \neq 0$

$x^2 + x - \frac{7}{4} = x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}x - \frac{7}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 2$

$\boldsymbol{f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}}, \quad a \neq 0$

$\boldsymbol{\Delta} = 8 \quad a = 1 \quad b = 1$

wierzchołek paraboli

$\boldsymbol{W = (p, q)}, \quad \boldsymbol{p = -\frac{b}{2a}} \quad \boldsymbol{q = -\frac{\Delta}{4a}}$

$y = x^2 + x - \frac{7}{4} \quad W = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{8}{4}\right)$

$\boldsymbol{W = (p, q)}, \quad \boldsymbol{p = \frac{x_1 + x_2}{2}} \quad \boldsymbol{q = f(p)}$

$y = x^2 - 2x \quad x_1 = 0 \quad x_2 = 2$

$p = \frac{0+2}{2} = 1 \quad q = f(1) = -1 \quad W = (1, -1)$

Postać iloczynowa

Gdy $\boldsymbol{\Delta} > 0$

$\boldsymbol{f(x) = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)}$

$f(x) = 3x^2 - 2x - 1 \quad \boldsymbol{\Delta} = 16 \quad x_1 = -\frac{1}{3} \quad x_2 = 1$

$f(x) = 3\left(x + \frac{1}{3}\right)(x - 1)$

Gdy $\boldsymbol{\Delta} = 0$

$f(x) = -2x^2 - 16x - 32 \quad \boldsymbol{\Delta} = 0 \quad x_0 = -4$

$\boldsymbol{f(x) = a(x - x_0)^2}$

$f(x) = -2(x + 4)^2$

Gdy $\boldsymbol{\Delta} < 0$

brak postaci iloczynowej

(R) Wzory Viéte'a

Gdy $\boldsymbol{\Delta} \geq 0$

$(\boldsymbol{x_1 + x_2}) = -\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}$ suma pierwiastków $x^2 - x - 30 \quad \boldsymbol{x_1 + x_2 = -b} = 1, \quad \boldsymbol{x_1 \cdot x_2 = c} = -30$

$\boldsymbol{x_1 \cdot x_2} = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a}}$ iloczyn pierwiastków $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2$

Ciąg arytmetyczny

Dla dowolnych $n, k \in N_+,\ 0 < k < n,\ r \in R,\ a, b \in R$

Ciąg (a_n) $\mathbf{6, 8, 10, 12, 14, \ldots}$

różnica ciągu

$\boldsymbol{a_{n+1} - a_n = r}$ $r = 2,\ \text{bo}\ 8 - 6 = 10 - 8 = \cdots = 2$

warunek na ciąg arytmetyczny

$\boldsymbol{a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}}, n > 1$ $\frac{6+10}{2} = 8$

wzór na n-ty wyraz (ogólny)

$\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1)r}$ $a_n = 6 + (n-1) \cdot 2$

wzór rekurencyjny

(R) $\begin{cases} \boldsymbol{a_1 = c} \\ \boldsymbol{a_{n+1} = a_n + r} \end{cases}$ $\begin{cases} a_1 = 6 \\ a_{n+1} = a_n + 2 \end{cases}$

$\boldsymbol{a_n = a_k + (n-k)r}$ $a_3 = 10,\ \text{to}\ \ a_5 = 10 + (5-3) \cdot 2$

związek ciągu z funkcją liniową

$\boldsymbol{a_n = a \cdot n + b}$ $a_1 = 2 \cdot 1 + 4,\ \text{to}\ \ a_5 = 2 \cdot 5 + 4$

$\boldsymbol{S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n}$ lub $\boldsymbol{S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n}$ $S_4 = \frac{a_1 + a_4}{2} \cdot 4 = \frac{6+12}{2} \cdot 4$

suma n początkowych wyrazów

$S_n = a_1 + a_2 + \ \ldots + a_n$

Procent prosty

Kapitały: K_0 – początkowy i K_n – końcowy, p – roczna stopa procentowa, n – liczba lat

kapitał po n latach

$\boldsymbol{K_n = K_0 + \frac{p}{100} \cdot K_0 \cdot n}$

Pożyczkę 800 zł zaciągnięta na 6% w skali roku spłacono po 4 miesiącach w kwocie

$K_4 = 800 + \frac{6 \cdot 800 \cdot 4}{100 \cdot 12}$

odsetki za okres m miesięcy

$\boldsymbol{O_m = \frac{pK_0 m}{100 \cdot 12}}$

Ciąg geometryczny

Dla dowolnych $n, k \in N_+,\ \ 0 < k < n,\ \ r \in R$

Ciąg (a_n) $\qquad$ $\mathbf{12, 6, 3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \ldots}$

---

iloraz ciągu

$\boldsymbol{\frac{a_{n+1}}{a_n} = q}$ $\qquad$ $q = \frac{1}{2},\ \text{bo}\ \frac{6}{12} = \frac{3}{6} = \frac{\frac{3}{2}}{3} = \cdots = \frac{1}{2}$

---

warunek na ciąg geometryczny

$(\boldsymbol{a_n})^2 = \boldsymbol{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}, n > 1$ $\qquad$ $6 \cdot \frac{3}{2} = 3^2$

---

wzór na n-ty wyraz (ogólny)

$\boldsymbol{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$ $\qquad$ $a_n = 12 \cdot (\frac{1}{2})^{n-1}$

---

wzór rekurencyjny

(R) $\begin{cases} a_1 = c \\ a_{n+1} = a_n \cdot q \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} a_1 = 12 \\ a_{n+1} = a_n \cdot \frac{1}{2} \end{cases}$

$\boldsymbol{a_n = a_k \cdot q^{n-k}}$ $\qquad$ $a_2 = 6,\ \text{to}\ \ a_5 = 6 \cdot (\frac{1}{2})^{5-2}$

$\boldsymbol{S_n} = \begin{cases} \boldsymbol{a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}} & \text{dla} \quad q \neq 1 \\ \boldsymbol{n \cdot a_1} & \text{dla} \quad q = 1 \end{cases}$ $\qquad$ $S_5 = a_1 \cdot \frac{1-q^5}{1-q} = 12 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^5}{1-\frac{1}{2}}$

suma n początkowych wyrazów

$S_n = a_1 + a_2 + \ \ldots + a_n$

Procent składany

Kapitały: K_0 – początkowy i K_n – końcowy, p – roczna stopa procentowa, n – liczba lat

kapitał po n latach

$\boldsymbol{K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n}$

50 tys. zł na inwestycję 3-letnią z kapitalizacją wraz z odsetkami na 20% w skali roku daje kapitał

$K_3 = 50 \cdot (1{,}2)^3$ tys. zł

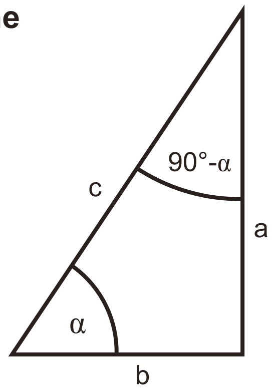
Funkcje trygonometryczne

kąta ostrego

$\boldsymbol{sin\alpha = \frac{a}{c}}$

$\boldsymbol{cos\alpha = \frac{b}{c}}$

$\boldsymbol{tg\alpha = \frac{a}{b}}$



$sin(90° - \alpha) = \frac{b}{c}$ $\quad$ $\boldsymbol{sin(90° - \alpha) = cos\alpha}$

$cos(90° - \alpha) = \frac{a}{c}$ $\quad$ $\boldsymbol{cos(90° - \alpha) = sin\alpha}$

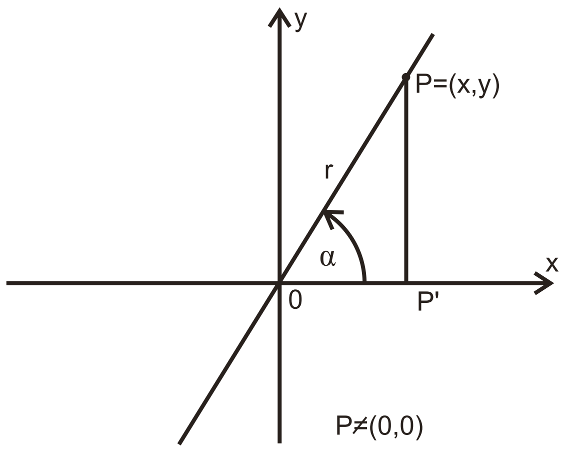
$tg(90° - \alpha) = \frac{b}{a}$ $\quad$ $\boldsymbol{tg(90° - \alpha) = \frac{1}{tg\alpha}}$

kąta dowolnego

$\boldsymbol{sin\alpha = \frac{y}{r}}$

$\boldsymbol{cos\alpha = \frac{x}{r}}$

$\boldsymbol{tg\alpha = \frac{y}{x}}$



Dla $P = (1\frac{7}{10}, 2\frac{8}{10})$ promień wodzący

$\boldsymbol{r = \sqrt{x^2 + y^2}} \approx 3{,}3$ $\quad$ $sin\alpha = \frac{2{,}8}{3{,}3} \approx 0{,}848$

$cos\alpha = \frac{1{,}7}{3{,}3} \approx 0{,}515$ $\quad$ $tg\alpha = \frac{2{,}8}{1{,}7} \approx 1{,}646$

Związki między funkcjami trygonometrycznymi

Dla kąta dowolnego

$\boldsymbol{sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1}$

$sin^2\alpha + sin^2(90° + \alpha) = sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$

$\boldsymbol{-1 \leq sin\alpha \leq 1}$ i $\boldsymbol{-1 \leq cos\alpha \leq 1}$

$1 - sin\alpha \geq 0$ i $1 - cos\alpha \geq 0$

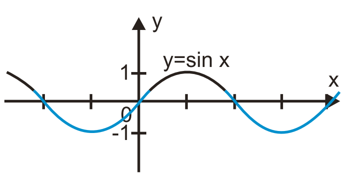
$\boldsymbol{tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}}$ gdy $cos\alpha \neq 0$

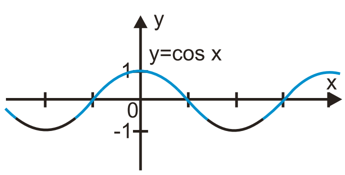
$sinx < x < tgx,$ gdy $x \in (0°; 90°)$

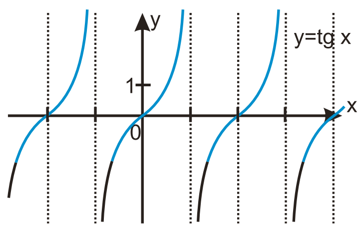
Dla kąta ostrego

$0 < sin\alpha < 1$ i $0 < cos\alpha < 1$

$0 < tgx < \infty$







Wartości funkcji trygonometrycznych

Dla kątów ostrych

α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$tg\,\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Dla kątów rozwartych

α	150°	135°	120°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$tg\,\alpha$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$

(R) Radian

$$\mathbf{180^\circ = \pi\, rad \quad \rightarrow \quad x\, rad = \left(\frac{180\cdot x}{\pi}\right)^\circ}$$

$$tg120^\circ = tg\frac{2\pi}{3} \qquad cos\frac{5}{6}\pi = cos150^\circ$$

Okresowość

Dla $k \in C$

$\sin(2k\pi + \alpha) = sin\alpha \qquad \cos(2k\pi + \alpha) = cos\alpha$

$tg(k\pi + \alpha) = tg\alpha, \;\; \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

Wartości funkcji trygonometrycznych szczególnych kątów

$\boldsymbol{sin0^\circ = 0} \qquad \boldsymbol{cos0^\circ = 1} \qquad \boldsymbol{tg0^\circ = \frac{sin0^\circ}{cos0^\circ} = \frac{0}{1} = 0}$

$\boldsymbol{sin90^\circ = 1} \qquad \boldsymbol{cos90^\circ = 0} \qquad \boldsymbol{tg90^\circ = \frac{1}{0} = \textit{nie istnieje}}$

$\boldsymbol{sin180^\circ = 0} \qquad \boldsymbol{cos180^\circ = -1} \qquad \boldsymbol{tg180^\circ = \frac{sin180^\circ}{cos180^\circ} = \frac{0}{-1} = 0}$

$\boldsymbol{sin270^\circ = -1} \qquad \boldsymbol{cos270^\circ = 0} \qquad \boldsymbol{tg270^\circ = \frac{-1}{0} = \textit{nie istnieje}}$

$\boldsymbol{sin360^\circ = 0} \qquad \boldsymbol{cos360^\circ = 1} \qquad \boldsymbol{tg360^\circ = \frac{sin360^\circ}{cos360^\circ} = \frac{0}{1} = 0}$

(R) Funkcje sumy i różnicy kątów

$$\boldsymbol{sin(\alpha+\beta) = sin\alpha cos\beta + cos\alpha sin\beta}$$

$$sin(\pi+\alpha) = sin\pi cos\alpha + cos\pi sin\alpha = \boldsymbol{-sin\alpha}$$

$$\boldsymbol{sin(\alpha-\beta) = sin\alpha cos\beta - cos\alpha sin\beta}$$

$$sin(\pi-\alpha) = sin\pi cos\alpha - cos\pi sin\alpha = \boldsymbol{sin\alpha}$$

$$\boldsymbol{cos(\alpha+\beta) = cos\alpha cos\beta - sin\alpha sin\beta}$$

$$cos(\pi+\alpha) = cos\pi cos\alpha - sin\pi sin\alpha = \boldsymbol{-cos\alpha}$$

$$\boldsymbol{cos(\alpha-\beta) = cos\alpha cos\beta + sin\alpha sin\beta}$$

$$sin(\pi-\alpha) = sin\pi cos\alpha - cos\pi sin\alpha = \boldsymbol{sin\alpha}$$

$$\boldsymbol{tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}}, \quad tg\alpha tg\beta \neq 1$$

$$tg(\pi+\alpha) = \frac{tg\alpha+tg\pi}{1-tg\alpha tg\pi} = \boldsymbol{tg\alpha}, \quad cos\alpha \neq 0$$

$$\boldsymbol{tg(\alpha-\beta) = \frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha tg\beta}}, \quad tg\alpha tg\beta \neq -1$$

$$tg(\pi-\alpha) = \frac{tg\pi-tg\alpha}{1-tg\alpha tg\pi} = \boldsymbol{-tg\alpha}, \quad cos\alpha \neq 0$$

Funkcje kąta podwojonego

$$\boldsymbol{sin2\alpha = 2sin\alpha cos\alpha}$$

$$sin120° = 2sin60°cos60° = 2\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\boldsymbol{cos2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha}$$

$$\boldsymbol{cos2\alpha} = 1 - sin^2\alpha - sin^2\alpha = \boldsymbol{1 - 2sin^2\alpha}$$

$$\boldsymbol{tg2\alpha} = \boldsymbol{\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}}, \quad tg^2\alpha \neq 1$$

$$\boldsymbol{tg\alpha} = tg2\cdot\frac{\alpha}{2} = \boldsymbol{\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-\left(tg\frac{\alpha}{2}\right)^2}}$$

Suma i różnica funkcji trygonometrycznych

$$\boldsymbol{sinx + siny = 2sin\frac{x+y}{2}cos\frac{x-y}{2}}$$

$$\boldsymbol{tgx + tgy} = \frac{sinx}{cosx} + \frac{siny}{cosy} = \frac{sinxsiny+sinycosx}{cosxcosy} = \boldsymbol{\frac{\sin(x+y)}{cosxcosy}}$$

$$\boldsymbol{sinx - siny = 2cos\frac{x+y}{2}sin\frac{x-y}{2}}$$

$$\boldsymbol{tgx - tgy = \frac{\sin(x-y)}{cosxcosy}}$$

$$\boldsymbol{cosx + cosy = 2cos\frac{x+y}{2}cos\frac{x-y}{2}}$$

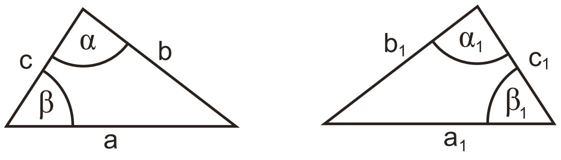
$$cos15° + cos105° = 2cos\frac{15°+105°}{2}cos\frac{105°-15°}{2} =$$

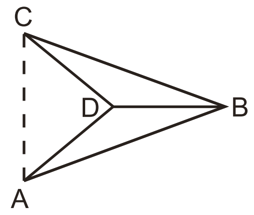
$$\boldsymbol{cosx - cosy = -2sin\frac{x+y}{2}sin\frac{x-y}{2}}$$

$$= 2cos60°cos45° = cos45°$$

Rozpoznawanie trójkątów przystających

dowolnych





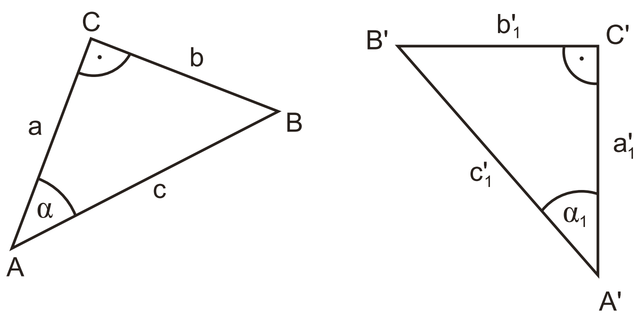
$a = a_1$ i $b = b_1$ i $c = c_1$ cecha bbb

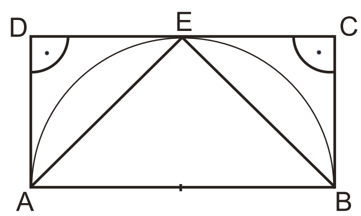
$b = b_1$ i $\alpha = \alpha_1$ i $c = c_1$ cecha bkb

$\alpha = \alpha_1$ i $c = c_1$ i $\beta = \beta_1$ cecha kbk

Z *4-ch* trójkątów równoramiennych przystające są $\Delta ABD \equiv \Delta BCD$ wg cechy bbb

prostokątnych





$I. c = c_1$ i $b = b_1$, to $\Delta ABC \equiv \Delta B'A'C'$

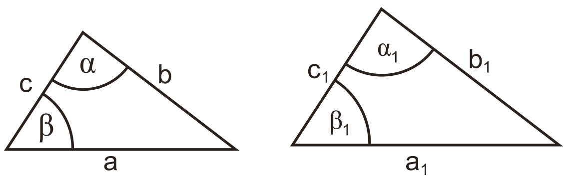
$II. a = a_1$ i $b = b_1$, to $\Delta ABC \equiv \Delta B'A'C'$

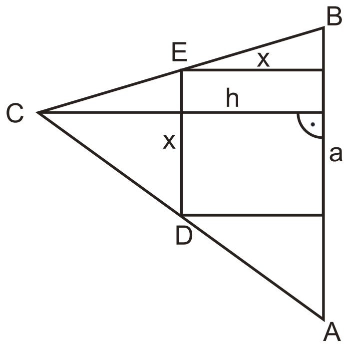
$III. c = c_1$ i $\alpha = \alpha_1$, to $\Delta ABC \equiv \Delta B'A'C'$

Z *3-ch* trójkątów prostokątnych równoramiennych przystające są $\Delta AED \equiv \Delta EBC$ wg $II.$

Rozpoznawanie trójkątów podobnych

dowolnych





$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$ cecha bbb

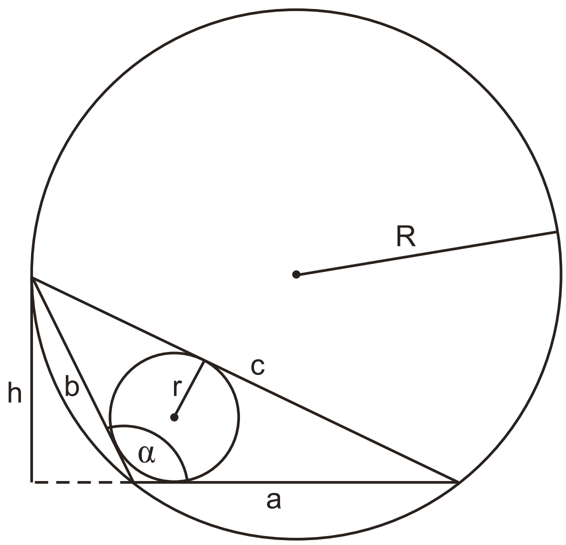
$\frac{a}{a_1} = \frac{c}{c_1}$ i $\beta = \beta_1$ cecha bkb

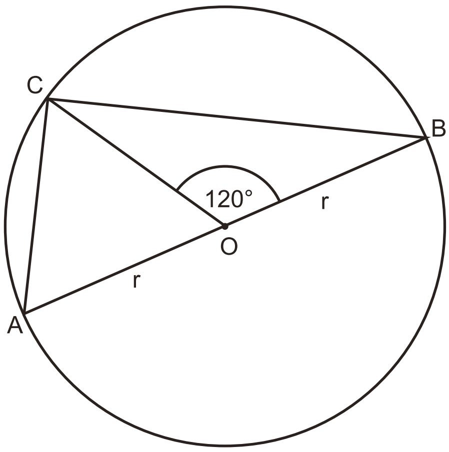
$\alpha = \alpha_1$ i $\beta = \beta_1$ cecha kkk

Z 8-u trójkątów można wybrać 7 par podobnych. Znając h i a w ΔABC przy obliczaniu boku x kwadratu skorzystamy z $\Delta ABC \sim \Delta DEC$ i proporcji $\frac{x}{a} = \frac{h-x}{h}$.

Pole, promień okręgu wpisanego i opisanego dla trójkąta

dowolnego





$\boldsymbol{P_\Delta = \frac{ah}{2}}$ $\boldsymbol{R = \frac{abc}{4P_\Delta}}$ $\boldsymbol{r = \frac{2P_\Delta}{a+b+c}}$

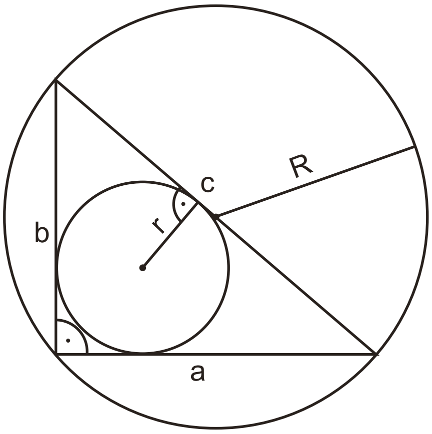
$\boldsymbol{P_\Delta = \frac{1}{2} absin\alpha}$

$\boldsymbol{P_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad p = \frac{a+b+c}{2}}$

$P_{\Delta OBC} = \frac{1}{2} r^2 sin120° = \frac{1}{2} r^2 sin60°$

$P_{\Delta AOC} = \frac{r^2\sqrt{3}}{4}$, zatem $P_{\Delta OBC} = P_{\Delta AOC}$

prostokątnego



Sprawdzamy równość

$$\frac{ab}{a+b+c} = \frac{a+b-c}{2} / \cdot 2(a+b+c)$$

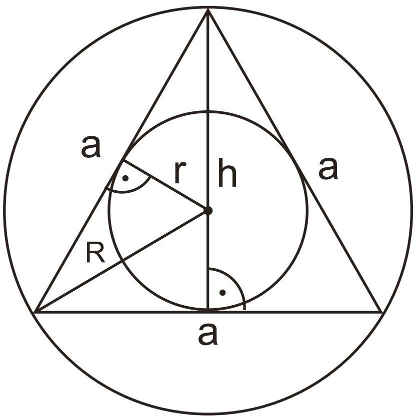
$$2ab = (a+b)^2 - c^2$$

Z twierdzenia Pitagorasa $c^2 = a^2 + b^2$

$$2ab = a^2 + 2ab + b^2 - a^2 - b^2 = 2ab$$

$\boldsymbol{P_\Delta = \frac{ab}{2}}$ $\boldsymbol{R = \frac{c}{2}}$ $\boldsymbol{r = \frac{ab}{a+b+c}}$ $\boldsymbol{r = \frac{a+b-c}{2}}$

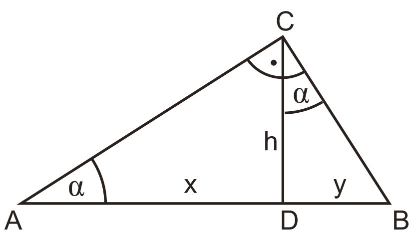
równobocznego

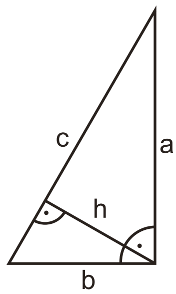


$\boldsymbol{P_\Delta = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}}$ $\boldsymbol{R = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}$ $\boldsymbol{r = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}$

$\boldsymbol{P_\Delta = \frac{ah}{2}}$ $\boldsymbol{h = \frac{a\sqrt{3}}{2}}$

wysokość w trójkącie prostokątnym





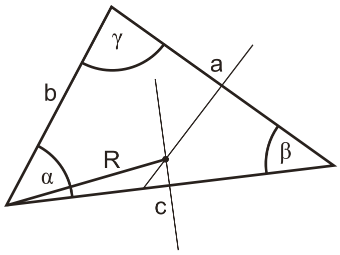
$\Delta ABC \sim \Delta ADC \sim \Delta DBC$

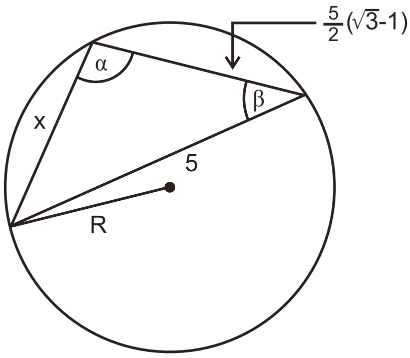
$\boldsymbol{h^2 = x \cdot y}$

Porównując wzory na pole trójkąta prostokątnego

$\boldsymbol{h = \frac{a \cdot b}{c}}$

Związki między bokami i kątami trójkąta





(R) Twierdzenie sinusów

Ile wynosi R dla $\alpha = 135°$?

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{sin\alpha}} = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{sin\beta}} = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{sin\gamma}} = \boldsymbol{2R}$$

$\frac{5}{sin\alpha} = 2R$, zatem $R = \frac{5}{2sin135°} = \frac{5}{2sin45°} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

(R) Twierdzenie kosinusów

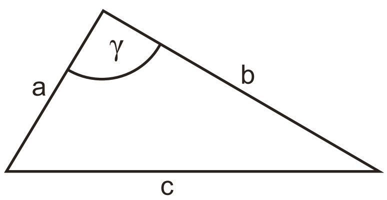
Jaka jest długość x dla $\beta = 30°$?

$$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2 - 2abcos\gamma}$$

$$x^2 = 5^2 + [\tfrac{5}{2}(\sqrt{3}-1)]^2 - 2 \cdot 5 \cdot \tfrac{5(\sqrt{3}-1)}{2} cos30°$$

$x^2 = \frac{25}{2}$, zatem $x = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

Twierdzenie Pitagorasa



Z boków trójkąta $3m, 4m$ i $5m$, $m \in N_+$, najdłuższym jest $5m$
$(4m)^2 + (3m)^2 = 25m^2 = (5m)^2$,
zatem każdy taki trójkąt jest prostokątny.

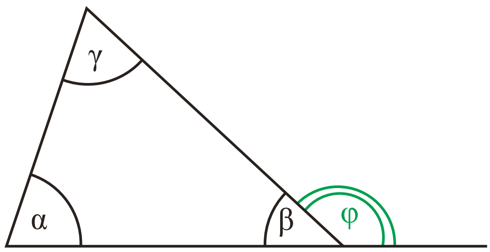
proste

$\gamma = 90° \Rightarrow \boldsymbol{a^2 + b^2 = c^2}$

odwrotne

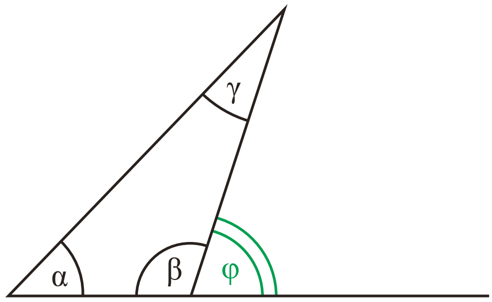
$c > b \geq a \ \wedge \ a^2 + b^2 = c^2 \ \Rightarrow \boldsymbol{\gamma = 90°}$

Kąty wewnętrzne i kąt zewnętrzny trójkąta



$\boldsymbol{\alpha + \beta + \gamma = 180°}$

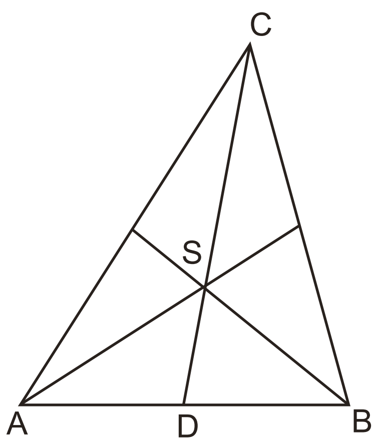
$\boldsymbol{\beta + \varphi = 180°}$



$\boldsymbol{\varphi = \alpha + \gamma}$

Z dwóch kątów wewnętrznych trójkąta α jest o $20°$ większy od γ, a kąt zewnętrzny φ przyległy do β ma $74°$. Wtedy $\alpha = \gamma + 20°$ i $\alpha + \gamma = 74°$. Zatem $\gamma = 27°$ i $\alpha = 47°$.

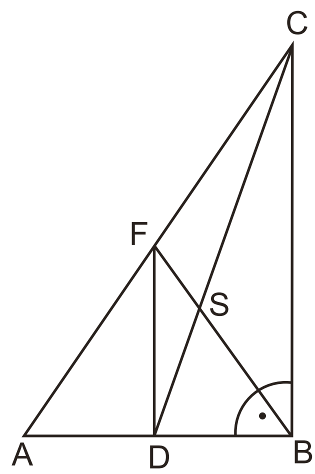
Środkowe boków trójkąta



$\boldsymbol{S} -$ środek ciężkości trójkąta

$|\boldsymbol{CS}| = 2|\boldsymbol{SD}|$

$|\mathbf{SD}| = \frac{1}{3}|\mathbf{CD}|$

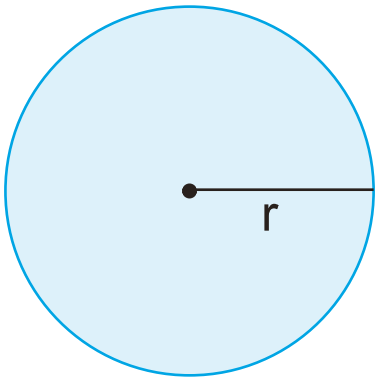


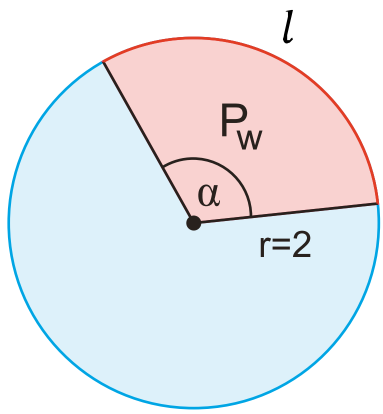
Środkowa BF ma długość

$|\boldsymbol{BF}| = \frac{1}{2}|\boldsymbol{AC}|$, bo $|FD| = \frac{|BC|}{2}$, z ΔDBF

$|BF|^2 = \left(\frac{|BC|}{2}\right)^2 + \left(\frac{|\boldsymbol{AB}|}{2}\right)^{\boldsymbol{2}} = \left(\frac{|\boldsymbol{AC}|}{2}\right)^{\boldsymbol{2}}$

Koło, okrąg





Pole koła $\boldsymbol{P = \pi r^2}$

Obwód koła lub długość okręgu

$\boldsymbol{L = 2\pi r}$

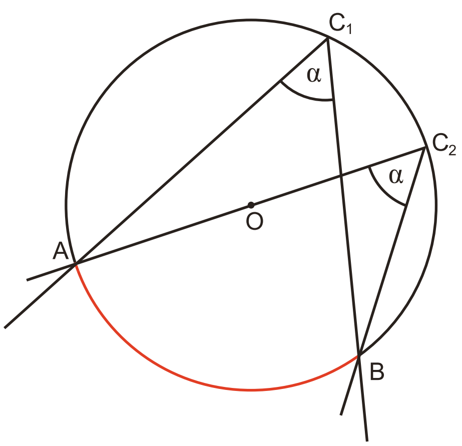
Pole wycinka koła $\frac{P_w}{\pi r^2} = \frac{\alpha}{360°}$

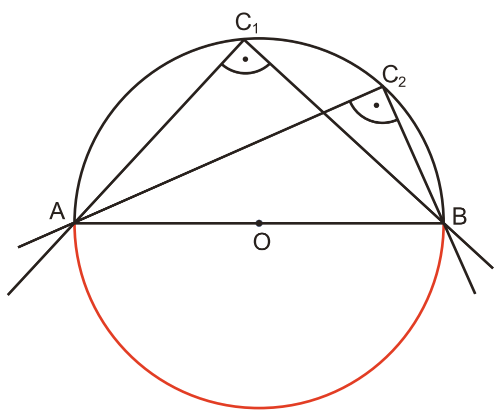
Długość łuku okręgu $\frac{l}{2\pi r} = \frac{\alpha}{360°}$

Dla $\alpha = 120°$: $P_w = \frac{4}{3}\pi(j^2)$ i $l = \frac{4}{3}\pi(j)$

Kąty w kole

wpisane





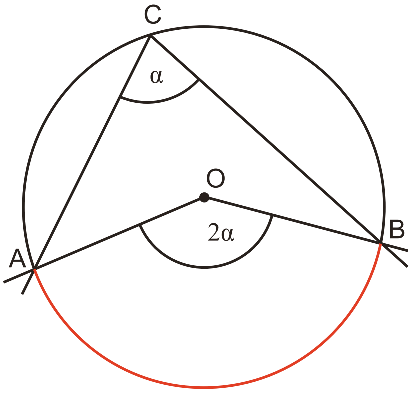
oparte na tym samym łuku

$|\angle \boldsymbol{AC_1B}| = |\angle \boldsymbol{AC_2B}|$

oparte na półokręgu

$|\angle \boldsymbol{AC_1B}| = |\angle \boldsymbol{AC_2B}| = \boldsymbol{90°}$

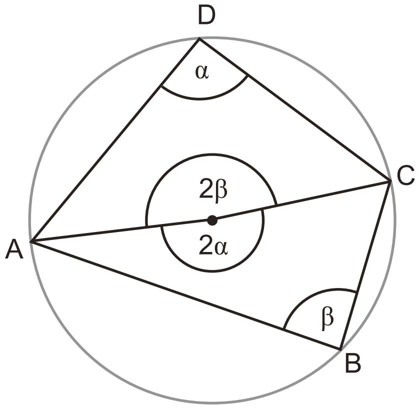
wpisany i środkowy



oparte na tym samym łuku

$$|\angle \boldsymbol{AOB}| = \mathbf{2}|\angle \boldsymbol{ACB}|$$

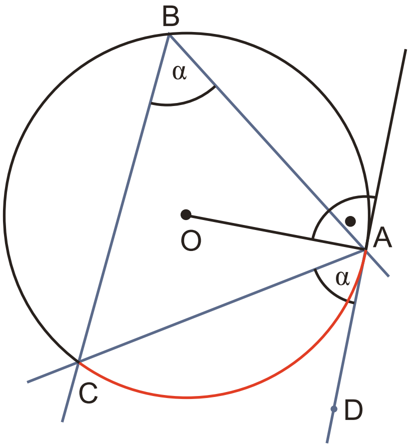
$$|\angle \boldsymbol{ACB}| = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}|\angle \boldsymbol{AOB}|$$



Suma kątów przeciwległych w czworokącie $ABCD$

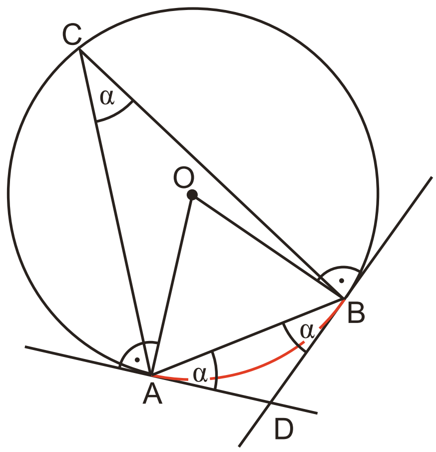
$\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = \mathbf{180°}$, bo $2\beta + 2\alpha = 360°$

wpisany i dopisany



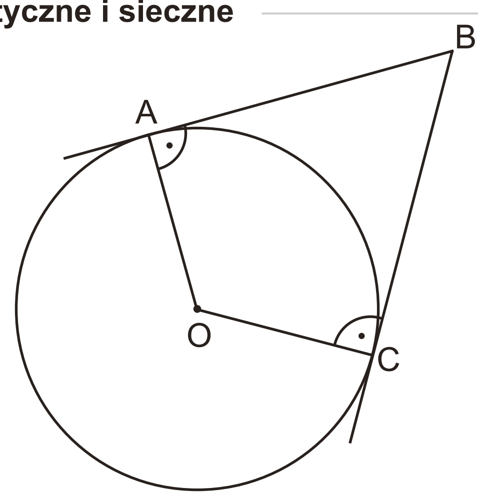
oparte na tym samym łuku

$$|\angle \boldsymbol{ABC}| = |\angle \boldsymbol{CAD}|$$



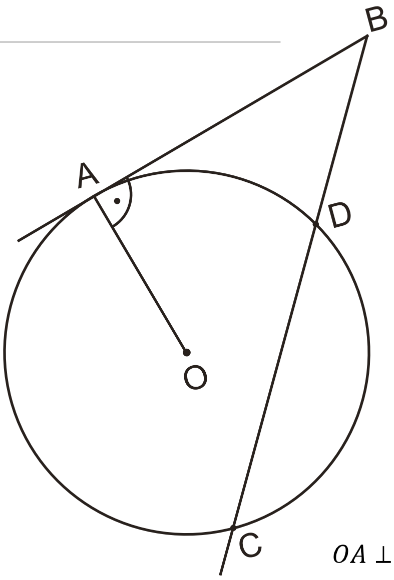
$|\angle ACB| = |\angle ABD|$ i $|\angle ACB| = |\angle BAD|$, to $|\boldsymbol{AD}| = |\boldsymbol{DB}|$

Styczne i sieczne



$OA \perp AB$ i $OC \perp BC$

$$|\boldsymbol{BA}| = |\boldsymbol{BC}|$$

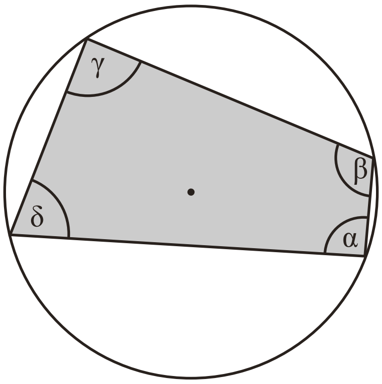


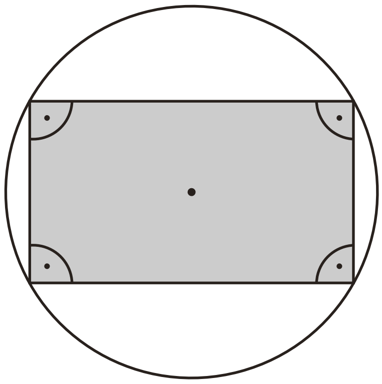
$OA \perp AB$

$$|\boldsymbol{BD}| \cdot |\boldsymbol{BC}| = |\boldsymbol{BA}|^2$$

Czworokąt wypukły

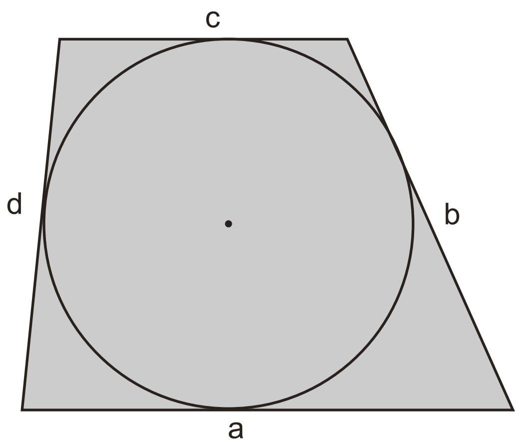
wpisany w okrąg

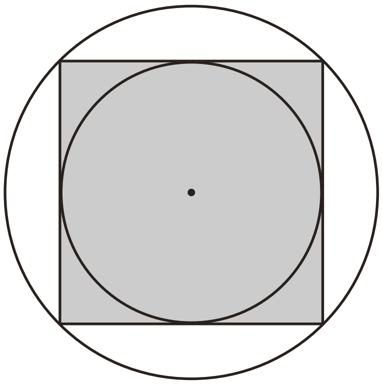




$\boldsymbol{\alpha + \gamma = \beta + \delta} = 180°$

opisany na okręgu

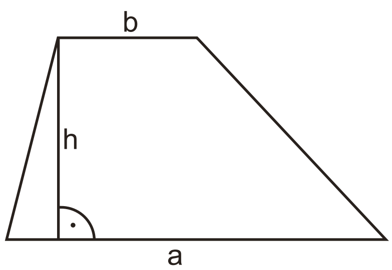




$\boldsymbol{a + c = b + d}$

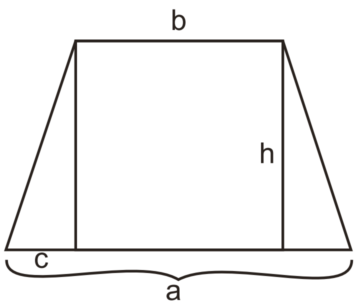
Pola czworokątów

trapezu dowolnego



$\boldsymbol{P = \frac{a+b}{2} \cdot h}$

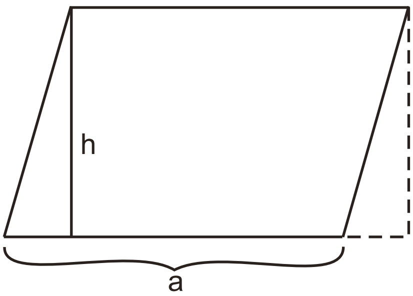
trapezu równoramiennego



Dane: a, c, h

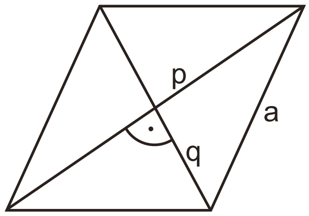
Zatem $b = a + 2c$ i $\boldsymbol{P = (a + c) \cdot h}$

równoległoboku dowolnego



$\boldsymbol{P = a \cdot h}$

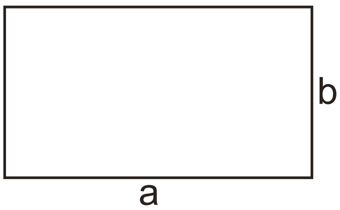
rombu



$\boldsymbol{P} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{2} \cdot \frac{q}{2} = \boldsymbol{\frac{pq}{2}}$

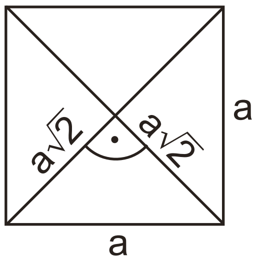
---

prostokąta



$\boldsymbol{P = a \cdot b}$

kwadratu

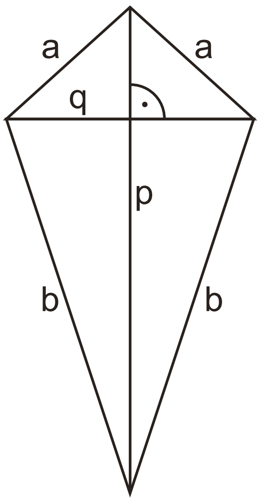


$P = a \cdot a$ lub $P = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}$

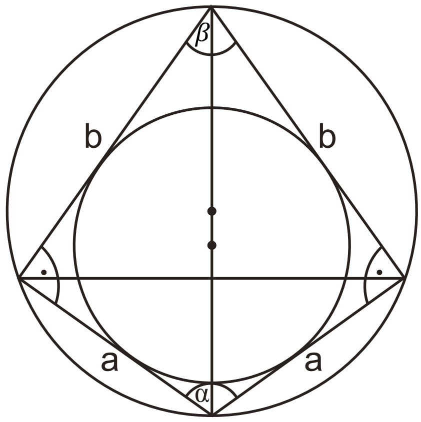
$\boldsymbol{P = a^2}$

---

deltoidu



$P = \boldsymbol{\frac{pq}{2}}$

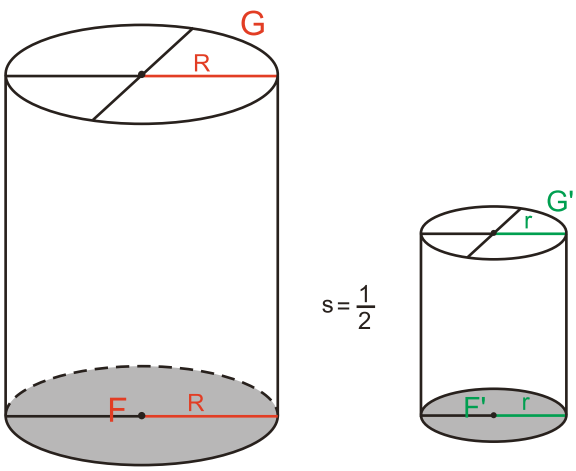


Ponieważ $a + b = a + b$ i $\alpha + \beta = 90° + 90°$, to w deltoid, którego równe kąty są proste, można wpisać okrąg i na nim opisać okrąg.

Figury podobne o skali $s, \ s > 0$

Dla odpowiadających odcinków AB i $A'B'$ w figurach podobnych

$|A'B'| = s \cdot |AB|$



dla pól figur F i F' podobnych płaskich

$\boldsymbol{P_{F'} = s^2 \cdot P_F}$

dla objętości figur podobnych G i G' przestrzennych

$\boldsymbol{V_{G'} = s^3 \cdot V_G}$

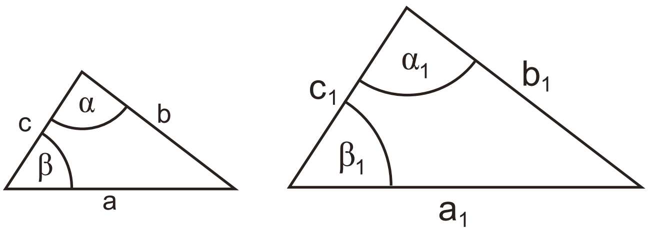
$$s = \frac{r}{R} = \frac{1}{2}$$

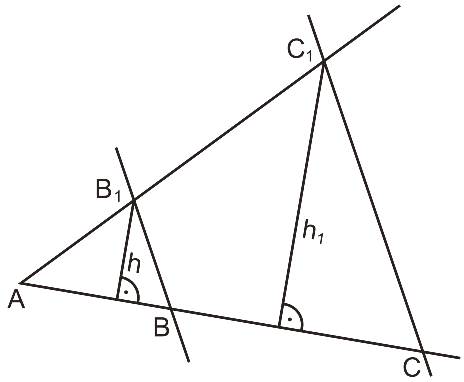
$$\frac{P_{F'}}{P_F} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\frac{V_{G'}}{V_G} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

Skala

Podobieństwo



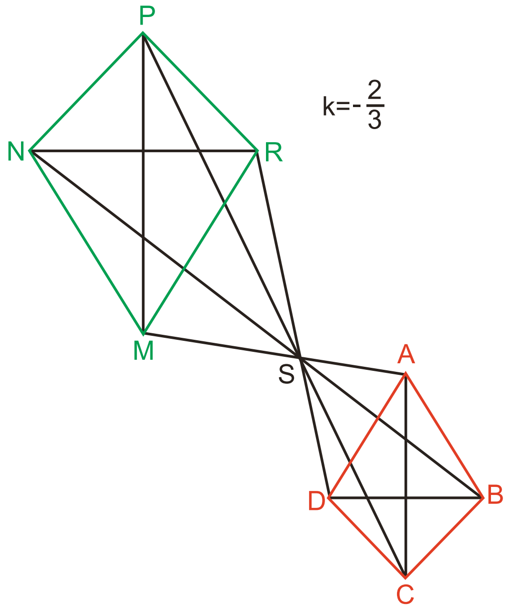


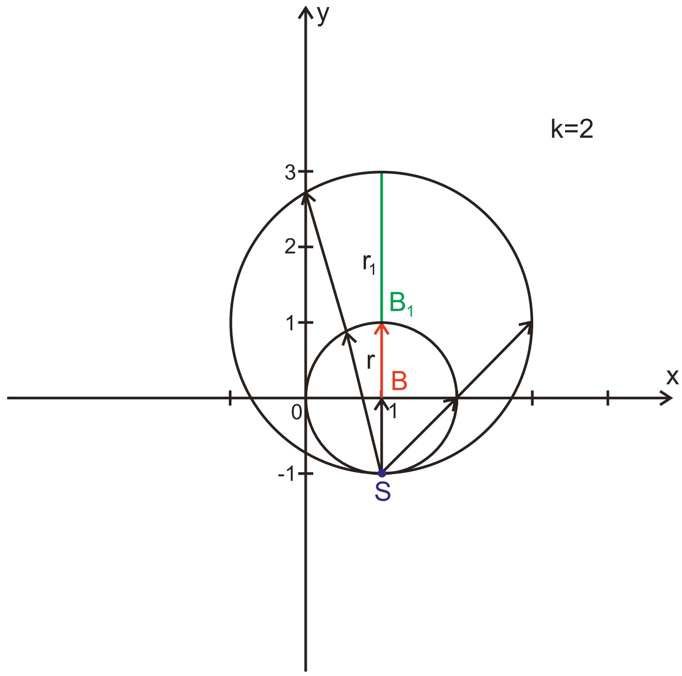
$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = k, \ k > 0$$

$\Delta ABB_1 \sim \Delta ACC_1$ w skali $k > 0$

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AB_1|}{|AC_1|} = \frac{|BB_1|}{|CC_1|} = k \quad \text{i} \quad \frac{h}{h_1} = k$$

(R) Jednokładność o skali k i środku S





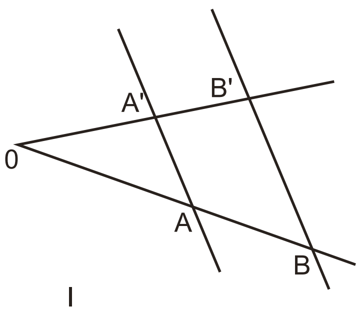
Czworokąt $ADCB$ jest obrazem czworokąta $NMRP$ w jednokładności o środku S i skali $k = -\frac{2}{3}$.

$$\boldsymbol{B = J_S^k(N) \Leftrightarrow \overrightarrow{SB} = k \cdot \overrightarrow{SN}}$$

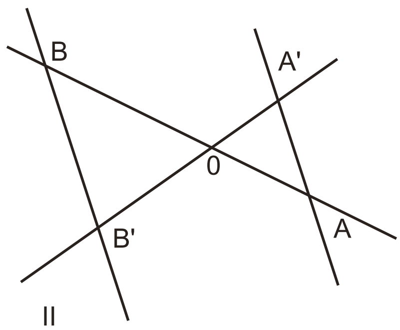
Obrazem okręgu $(x-1)^2 + y^2 = 1$ w jednokładności o środku $S = (1,-1)$ i skali $k = 2$ jest okrąg o promieniu $r_1 = 2$ i środku $B_1 = (1,1)$, co wynika z 2 warunków:

1. $\overrightarrow{SB_1} = 2\overrightarrow{SB}$
2. obrazem odcinka $r = 1$ jest odcinek długości $r_1 = k \cdot r$.

Twierdzenie Talesa



I



II

proste

$\boldsymbol{AA' \parallel BB'}$ to $\frac{|\boldsymbol{OA}|}{|\boldsymbol{OB}|} = \frac{|\boldsymbol{OA'}|}{|\boldsymbol{OB'}|}$

odwrotne

$\frac{|\boldsymbol{OA}|}{|\boldsymbol{OB}|} = \frac{|\boldsymbol{OA'}|}{|\boldsymbol{OB'}|}$ to $\boldsymbol{AA' \parallel BB'}$

Zauważ, że $\frac{|\boldsymbol{AB}|}{|\boldsymbol{OA}|} = \frac{|\boldsymbol{A'B'}|}{|\boldsymbol{OA'}|}$, gdyż $\frac{|OB|}{|OA|} = \frac{|OB'|}{|OA'|}$ oraz

$(\mathrm{I})\ \frac{|OB|}{|OA|} - 1 = \frac{|OB'|}{|OA'|} - 1$ to $\frac{|OB|-|OA|}{|OA|} = \frac{|OB'|-|OA'|}{|OA'|}$

lub $(\mathrm{II})\ \frac{|OB|}{|OA|} + 1 = \frac{|OB'|}{|OA'|} + 1$ to $\frac{|BO|+|OA|}{|OA|} = \frac{|B'O|+|OA'|}{|OA'|}$

Działania na wektorach $\vec{a} = [a_1, a_2]$ i $\vec{b} = [b_1, b_2]$

Równość wektorów

$[\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}] = [\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}] \Leftrightarrow \boldsymbol{a_1} = \boldsymbol{b_1}$ i $\boldsymbol{a_2} = \boldsymbol{b_2}$

$[k, 5] = [-12, m] \Leftrightarrow k = -12$ i $m = 5$

Mnożenie wektora przez liczbę $k \in R$

$\boldsymbol{k} \cdot \vec{\boldsymbol{a}} = [\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{a_2}]$

$3 \cdot [-1, 2] = [-3, 6]$

Warunek równoległości wektorów niezerowych

$\vec{\boldsymbol{a}} \parallel \vec{\boldsymbol{b}} \Leftrightarrow \frac{\boldsymbol{a_2}}{\boldsymbol{a_1}} = \frac{\boldsymbol{b_2}}{\boldsymbol{b_1}}$

$[2, -k] \parallel [4, 2]$, gdy $\frac{4}{2} = \frac{2}{-k}$

Dla $k = -1$ zachodzi równoległość wektorów.

Warunek prostopadłości wektorów niezerowych

$\vec{\boldsymbol{a}} \perp \vec{\boldsymbol{b}} \Leftrightarrow \boldsymbol{a_1 b_1} + \boldsymbol{a_2 b_2} = \boldsymbol{0}$

Wektory $\vec{x} = [10^{-1}, 3]$ i $\vec{y} = [-30, 1]$ są prostopadłe, gdyż $10^{-1} \cdot (-30) + 3 \cdot 1 = 0$

Dodawanie wektorów

$[\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}] + [\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}] = [\boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{a_2} + \boldsymbol{b_2}]$

$[-3, 0] + [13, -7] = [10, -7]$

Odejmowanie wektorów

$[\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}] - [\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}] = [\boldsymbol{a_1} - \boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{a_2} - \boldsymbol{b_2}]$

$[-3, 0] - [13, -7] = [-16, 7]$

Długość wektora $\vec{a}$

$|\vec{\boldsymbol{a}}| = \sqrt{(\boldsymbol{a_1})^2 + (\boldsymbol{a_2})^2}$

$\vec{u} = [3, -4]$, to $|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$

Współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$, $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$

$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = [(\boldsymbol{x_B} - \boldsymbol{x_A}), (\boldsymbol{y_B} - \boldsymbol{y_A})]$

$A = (0, 3)$ i $B = (2, 1)$, to $\overrightarrow{AB} = [2 - 0, 1 - 3]$

Długość wektora $\overrightarrow{AB}$, $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$

$|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}| = \sqrt{(\boldsymbol{x_B} - \boldsymbol{x_A})^2 + (\boldsymbol{y_B} - \boldsymbol{y_A})^2}$

$A = (0, 3)$ i $B = (2, 1)$, to $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2}$

Prosta na płaszczyźnie

Równanie prostej pionowej

$l: \boldsymbol{x = c}$, gdzie $c \in R$

Równanie prostej l przechodzącej przez punkty $A = \left(3,\ 2\frac{1}{2}\right)$ i $B = (3,\ 5)$ jest postaci $x = 3$

Równanie prostej poziomej

$l: \boldsymbol{y = b}$, gdzie $b \in R$

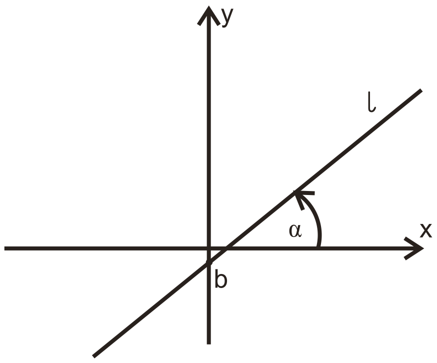
Równanie prostej l przechodzącej przez punkty $A = \left(3,\ 1\frac{1}{2}\right)$ i $B = \left(-2,\ 1\frac{1}{2}\right)$ jest postaci $y = 1\frac{1}{2}$

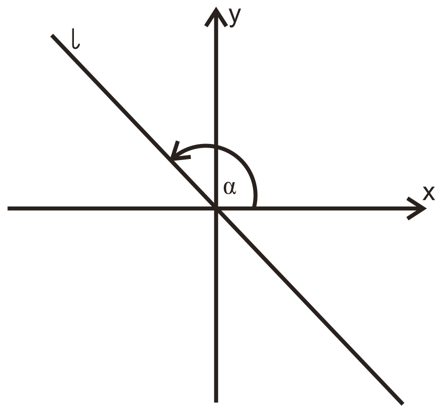
Równanie prostej ukośnej (kierunkowe)

$l: \boldsymbol{y = ax + b}$ i $a \neq 0$

Równanie prostej l przechodzącej przez punkty $A = (0, 0)$ i $B = (1, 1)$ jest postaci $y = x$

Współczynnik kierunkowy prostej l





$\boldsymbol{a = tg\alpha}$,

$l: y = ax + b$ i $a \neq 0$

$l: y = -x$, więc $a = -1$ i $tg\alpha = -1$

zatem $\alpha = 135°$

Równanie prostej przychodzącej przez A i B

$A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$

$$\boldsymbol{(y_B - y_A) \cdot (x - x_A) - (x_B - x_A) \cdot (y - y_A) = 0}$$

Gdy prosta przechodzi przez punkty $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$, to współczynnik kierunkowy jest postaci $\boldsymbol{a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$.

Równanie prostej w postaci ogólnej

$$\boldsymbol{Ax + By + C = 0},$$

gdzie $A^2 + B^2 \neq 0$

Które z równań $2x - 2y + 0 = 0$, $0x + y - 1 = 0$, $x + 0y = 0$, $0x + 0y - 3 = 0$ nie jest równaniem ogólnym prostej?

Równanie $0x + 0y - 3 = 0$ bo nie spełnia warunku $A^2 + B^2 \neq 0$.

Odległość punktu $P = (x_0, y_0)$ od prostej

$l: Ax + By + C = 0$

$$\boldsymbol{d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}$$

Dla prostej w postaci kierunkowej $l: y = ax + b$ odległość punktu $P = (x_0, y_0)$ od prostej l

$$\boldsymbol{d = \frac{|ax_0 - y_0 + b|}{\sqrt{a^2 + 1}}}$$

Równoległość i prostopadłość prostych

Dla dwóch prostych

$l_1: y = a_1x + b_1$ i $l_2: y = a_2x + b_2$

$\boldsymbol{l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2}$

$\boldsymbol{l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow a_2 \cdot a_1 = -1}$

Dwie proste $y = 3x - 0{,}2$ i $y = ax + 1$ są równoległe, gdy $a = 3$

prostopadłe, gdy $3 \cdot a = -1$

Tangens kąta między prostymi

$y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$

$\boldsymbol{tg\alpha = \left|\frac{a_1 - a_2}{1 + a_1a_2}\right|}$

Kąt między prostymi

$y = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}x + 2$ i $y = \sqrt{3}x$

$tg\alpha = \left|\frac{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} - \sqrt{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \cdot \sqrt{3}}\right| = \left|\frac{-4}{4}\right| = 1, \quad \alpha = 45°$

Dla dwóch prostych

$l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$ i $l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$

$\boldsymbol{l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow A_1 \cdot B_2 - B_1 \cdot A_2 = 0}$

$\boldsymbol{l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0}$

Proste $2x - 3y + 1 = 0$ i $cx + 3y - 2 = 0$ są prostopadłe, gdy $2 \cdot c + (-3) \cdot 3 = 0$, więc $c = 4{,}5$.

Tangens kąta między prostymi

$A_1x + B_1y + C_1 = 0$ i $A_2x + B_2y + C_2 = 0$

$\boldsymbol{tg\alpha = \left|\frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1 \cdot B_2}\right|}$

Kąt między prostymi

$\sqrt{3}x - 3y = 0$ i $\sqrt{3}x - y + 2 = 0$

$tg\alpha = \left|\frac{-\sqrt{3} + 3\sqrt{3}}{3+3}\right| = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \alpha = 30°$

Długość odcinka i pole trójkąta

Długość odcinka o końcach A i B i jego środek S

$A = (x_A, y_A), B = (x_B, y_B)$ i $S = (x_S, y_S)$

$\boldsymbol{|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$

$\boldsymbol{x_S = \frac{x_A + x_B}{2}}$ i $\boldsymbol{y_S = \frac{y_A + y_B}{2}}$

Dla $A = (-4, 3)$ i $B = (5, 3)$

$|AB| = \sqrt{(5+4)^2 + (3-3)^2} = 9$

$x_S = \frac{-4+5}{2} = \frac{1}{2}$ i $y_S = \frac{3+3}{2} = 3, \; S = (\frac{1}{2}, 3)$

Pole trójkąta o wierzchołkach A, B, C i jego środek ciężkości S

$A = (x_A, y_A),\ B = (x_B, y_B),\ C = (x_C, y_C),\ S = (x_S, y_S)$

$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|(\boldsymbol{x_B} - \boldsymbol{x_A}) \cdot (\boldsymbol{y_C} - \boldsymbol{y_A}) - (\boldsymbol{y_B} - \boldsymbol{y_A}) \cdot (\boldsymbol{x_C} - \boldsymbol{x_A})|$

$\boldsymbol{x_S} = \frac{\boldsymbol{x_A + x_B + x_c}}{\boldsymbol{3}}$ i $\boldsymbol{y_S} = \frac{\boldsymbol{y_A + y_B + y_C}}{\boldsymbol{3}}$

Pole i środek ciężkości trójkąta o wierzchołkach

$(0{,}0), (1{,}1), (-1{,}1)$ jest równe

$P = \frac{1}{2}|(1-0)(1-0) - (1-0)(-1-0)| = 1$

$S = \left(\frac{0+1-1}{3}, \frac{0+1+1}{3}\right) = (0, \frac{2}{3})$

Równanie okręgu i opis koła

Rownanie okręgu o środku (a, b) i promieniu r

1. kanoniczne

   $(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})^2 + (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{r}^2$

2. ogólne

   $\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 - \boldsymbol{2ax} - \boldsymbol{2by} - \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0},$
   gdzie $r^2 = a^2 + b^2 - c > 0$

Okrąg o środku $(3, -1)$ i promieniu $r = 4$

zapiszemy w postaci kanonicznej

1. $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4^2$

i w postaci ogólnej

2. $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 6 = 0.$

Z postaci 2. $a = 3,\ b = -1$ oraz

$3^2 + (-1)^2 - (-6) = 16 > 0,\ r = 4.$

Opis koła o środku (a, b) i promieniu r

1. domkniętego

   $(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})^2 + (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{b})^2 \leq \boldsymbol{r}^2$

2. otwartego

   $(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})^2 + (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{b})^2 < \boldsymbol{r}^2$

Nierówność $(x-a)^2 + (x-b)^2 \geq r^2$

opisuje zbiór punktów $P = (x, y)$

które leżą na zewnątrz koła otwartego.

Obraz P' punktu P w przekształceniach na płaszczyźnie

w symetrii względem osi x

$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{x_P}, \boldsymbol{y_P}) \longrightarrow \boldsymbol{P'} = (\boldsymbol{x_P}, -\boldsymbol{y_P})$

W symetrii względem osi x obrazem prostej

$y = 5x + 4$ jest prosta $y = -5x - 4$

w symetrii względem osi y

$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{x_P}, \boldsymbol{y_P}) \longrightarrow \boldsymbol{P'} = (-\boldsymbol{x_P}, \boldsymbol{y_P})$

Obrazem prostej $l: y = ax + b$ w symetrii względem osi y

jest prosta $l': y = -ax + b$

w symetrii środkowej względem punktu $(0{,}0)$

$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{x_P}, \boldsymbol{y_P}) \longrightarrow \boldsymbol{P'} = (-\boldsymbol{x_P}, -\boldsymbol{y_P})$

Proste $l: y = ax + b$ i $l': y = ax - b$ są symetryczne względem początku układu współrzędnych.

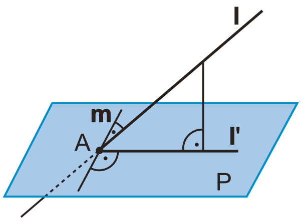
w przesunięciu o wektor $[a, b]$

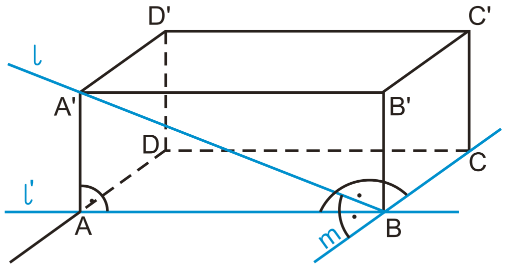
$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{x_P}, \boldsymbol{y_P}) \longrightarrow \boldsymbol{P'} = (\boldsymbol{x_P} + \boldsymbol{a}, \boldsymbol{y_P} + \boldsymbol{b})$

Obrazem punktu $P = (-1, -6)$ w przesunięciu o wektor $[1, 3]$

jest punkt $P' = (0, -3)$

(R) Twierdzenie o trzech prostopadłych





$l \perp m \Leftrightarrow l' \perp m$

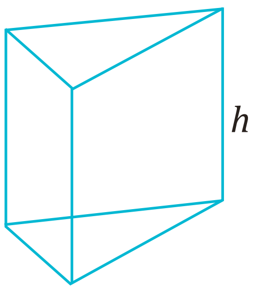
W prostopadłościanie $AB \perp BC$ i prosta l' jest rzutem prostokątnym prostej l na płaszczyznę podstawy ($A'A \perp AB$). Zatem $A'B \perp BC$.

Objętości i pola powierzchni figur przestrzennych

Wielościany

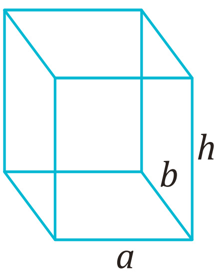
V - objętość, P - pole powierzchni, P_b - pole powierzchni bocznej,
P_c - pole powierzchni całkowitej, P_p - pole podstawy, $L = 2p$ - obwód podstawy, h - wysokość.

Graniastosłup prosty



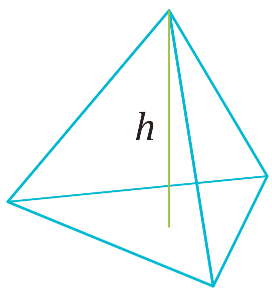
$V = P_p \cdot h$ $\quad P_b = L \cdot h$ $\quad P_c = 2P_p + P_b$

Prostopadłościan



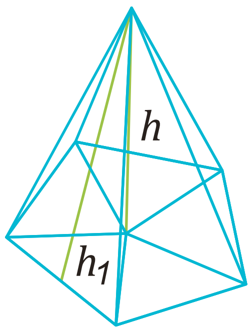
$V = a \cdot b \cdot h$ $\quad P_b = 2(ah + bh)$ $\quad P_c = 2(ah + bh + ab)$

Ostrosłup



$V = \frac{1}{3} P_p \cdot h$

Ostrosłup prawidłowy



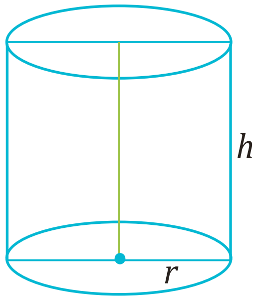
$V = \frac{1}{3} P_p \cdot h$

$P_b = p \cdot h_1$

$P_c = P_p + P_b$

Bryły obrotowe

Walec

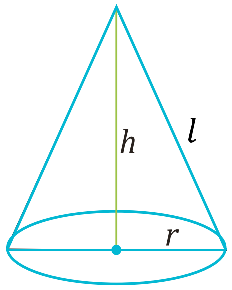


$V = \pi r^2 h$

$P_b = 2\pi r h$

$P_c = 2\pi r(h + r)$

Stożek

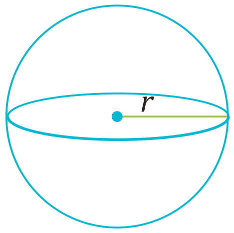


$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$

$P_b = \pi r l$

$P_c = \pi r(l + r)$

Kula



$V = \frac{4}{3} \pi r^3$

$P = 4\pi r^2$

Średnia w statystyce opisowej

Dla n liczb $x_1, x_2, \dots, x_n$ z wagami $p_1, p_2, \dots, p_n$, $n \in N_+$

Średnia

arytmetyczna

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, \quad n \geq 2$$

Średnia temperatura powietrza w ciągu 5 dni wynosi $15^\circ C$ a w ciągu 6 dni $14^\circ C$. Jaka temperatura była 6-go dnia ?

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5} = 15^\circ C, \quad \frac{5 \cdot 15^\circ C + x_6}{6} = 14^\circ C, \quad x_6 = 9^\circ C$$

arytmetyczna ważona

$$\bar{x} = \frac{x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}$$

Dane są ceny zestawów w zł: 3, 5, 8, 10, 14 i odpowiednio ich ilości w magazynie: 5, 25, 40, 20, 10. Cena średnia

$$\bar{x} = \frac{3 \cdot 5 + 5 \cdot 25 + 8 \cdot 40 + 10 \cdot 20 + 14 \cdot 10}{100} = \frac{800}{100} = 8$$

Mediana

$$Me = \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}} & \text{gdy } n \text{ nieparzyste} \\ \frac{1}{2}\left(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}\right) & \text{gdy } n \text{ parzyste} \end{cases}$$

Uporządkowane dane: 2, 7, $\underline{7, 11}$, 13, 14

$$Me = \frac{7+11}{2} = 9$$

Parametry

Dla n liczb $x_1, x_2, \dots, x_n$ z wagami $p_1, p_2, \dots, p_n$, $n \in N_+$, i dla średniej $\bar{x}$

Wariacja σ^2

Inne wzory

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

$$\sigma^2 = \frac{(x_1)^2 + (x_2)^2 + \dots + (x_n)^2}{n} - (\bar{x})^2$$

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 p_1 + (x_2 - \bar{x})^2 p_2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2 p_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}$$

$$\sigma^2 = \frac{(x_1)^2 p_1 + (x_2)^2 p_2 + \dots + (x_n)^2 p_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} - (\bar{x})^2$$

Odchylenie standardowe $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1)^2 + (x_2)^2 + \dots + (x_n)^2}{n} - (\bar{x})^2}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 p_1 + (x_2 - \bar{x})^2 p_2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2 p_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1)^2 p_1 + (x_2)^2 p_2 + \dots + (x_n)^2 p_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} - (\bar{x})^2}$$

Wynikami badań statystycznych były ceny zestawów obiadowych, z których niektóre powtarzały się: cena 3 zł - 5 razy, 5 zł - 25 razy, 8 zł - 40 razy, 10 zł - 20 razy i 14 zł - 10 razy.

Obliczamy odchylenie standardowe.

$$\overline{x} = \frac{x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} = \frac{3 \cdot 5 + 5 \cdot 25 + 8 \cdot 40 + 10 \cdot 20 + 14 \cdot 10}{5 + 25 + 40 + 20 + 10} = \frac{800}{100} = 8$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{(3-8)^2 \cdot 5 + (5-8)^2 \cdot 25 + (8-8)^2 \cdot 40 + (10-8)^2 \cdot 20 + (14-8)^2 \cdot 10}{100}} = \sqrt{\frac{790}{100}} = 2{,}81\ (zł)$$

Wniosek. Ceny poszczególnych zestawów obiadowych różniły się od ich średniej arytmetycznej przeciętnie o 2 zł 81 gorszy

SILNIA I SYMBOL NEWTONA

Silnia

Dla $n \epsilon N_+$

$\mathbf{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!}$ $\qquad 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

$\mathbf{n! \cdot (n+1) = (n+1)!}$ $\qquad 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 5! \cdot 6 = 120 \cdot 6 = 720$

$\mathbf{0! = 1 \qquad 1! = 1}$ $\qquad \frac{1!+0!}{0!} = \frac{1+1}{1} = 2$

Symbol Newtona

Dla $n, k \in N$ i $k \leq n$

$\boldsymbol{\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}}$ $\qquad \binom{5}{3} = \frac{5!}{(5-3)! \cdot 3!} = \frac{3! \cdot 4 \cdot 5}{2! 3!} = 10$

Własności

$\boldsymbol{\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1}$ $\qquad \binom{4}{0} = \frac{4!}{(4-0)! \cdot 0!} = \frac{4!}{4!} = 1$

$\boldsymbol{\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}}$ $\qquad \binom{7}{7-3} = \binom{7}{3}$, bo $\binom{7}{7-3} = \binom{7}{4} = \frac{7!}{(7-4)! \cdot 4!} = \frac{7!}{(7-3)! \cdot 3!} = \binom{7}{3}$

$\boldsymbol{\binom{n}{1} = n}$ $\qquad \binom{4}{1} + \binom{3}{1} = 4 + 3$

Dla $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\},\ k, n \in N_+$.

Liczba wariacji z powtórzeniami

Liczba ciągów utworzonych z k elementów zbioru A, w których wyrazy mogą się powtarzać

$\boldsymbol{\overline{V}_n^k = n^k}$

Ile jest liczb naturalnych czterocyfrowych, w których zapisie nie występuje 0 ?

$\overline{V}_9^4 = 9^4 = 6561$, bo $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

Liczba wariacji bez powtórzeń

Liczba ciągów utworzonych z k elementów zbioru A, w których wyrazy nie mogą się powtarzać

$\boldsymbol{V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}}, \quad 1 \leq k \leq n$

Trzyliterowych słów utworzonych z liter słowa $g\,r\,u\,p\,a$, tak aby każda litera w słowie była tylko raz jest

$V_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{120}{2} = 60$

Liczba permutacji

Liczba ciągów utworzonych z n elementów zbioru A, bez powtórzeń wyrazów

$\boldsymbol{P_n = n!}$

Czy liczba dowolnych ustawień 9-u różnych dokumentów z pudła na półkę jest mniejsza niż milion? Tak, bo $9! = 362880$.

Liczba kombinacji

Liczba zbiorów o k różnych elementach wybranych ze zbioru A, bez powtórzeń elementów.

$\boldsymbol{C_n^k = \binom{n}{k}}, \quad 0 \leq k \leq n$

Na ile sposobów można wybrać trzy z 25-u różnych książek?

$C_{25}^3 = \binom{25}{3} = \frac{25!}{(25-3)! \cdot 3!} = 2300$

Ω – skończona przestrzeń zdarzeń elementarnych jednakowo prawdopodobnych, $A, B \subset \Omega$

Prawdopodobieństwo klasyczne

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}}$$

Prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia można zapisać

$\frac{|A|}{|\Omega|}$ lub $\frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}}$

Prawdopodobieństwo

zdarzenia pewnego

$$\boldsymbol{P(\Omega) = 1}$$

Prawdopodobieństwo wyrzucenia orła lub reszki w rzucie monetą jest równe 1, bo zdarzenie jest pewne, innego wyniku dostać nie możemy.

zdarzenia niemożliwego

$$\boldsymbol{P(\emptyset) = 0}$$

W rzucie sześcienną kostką do gry uzyskanie 7 jest niemożliwe, zatem prawdopodobieństwo takiego wyniku jest 0.

zdarzenia przeciwnego

$$\boldsymbol{P(A') = 1 - P(A)}$$

Jeśli w skończonym zbiorze z liczbami parzystymi i nieparzystymi prawdopodobieństwo wylosowania liczby parzystej jest $\frac{1}{3}$, to nieparzystej $\frac{2}{3}$.

sumy zdarzeń

$$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

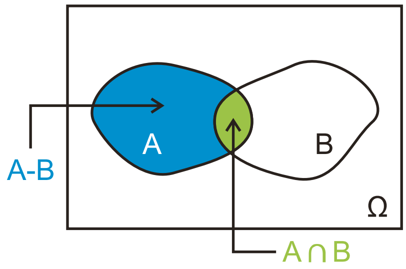
$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$ gdy $\boldsymbol{A \cap B = \emptyset}$

Dla $P(A) = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{1}{4}$ i $P(A \cup B) = \frac{3}{8}$

$\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)}$ i $P(A \cap B) = \frac{1}{24}$

różnicy zdarzeń

$$P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$$



$$A = (A-B) \cup (A \cap B) \;\text{ i }\; (A-B) \cap (A \cap B) = \emptyset$$

$$P(A) = P(A-B) + P(A \cap B)$$

Dla dowolnych zdarzeń $A, B \subset \Omega$ zachodzą nierówności

$\mathbf{0 \leq P(A) \leq 1}$

Jeżeli $B = \Omega$ i $A \subset B$, to $P(A) \leq P(\Omega)$.

$\boldsymbol{P(A) \leq P(B)}$ gdy $\boldsymbol{A \subset B}$

Zatem $P(A) \leq 1$. Dla $P(A) = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{1}{4}$ i $P(A \cap B) = \frac{1}{24}$ mamy

$\boldsymbol{P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)}$

$$P(A \cup B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{24} < \frac{1}{6} + \frac{1}{4}$$

TABLICA FUNKCJI TRYGONOMETRYCZNYCH

α	$\sin\alpha$ $\cos\beta$	$\mathrm{tg}\,\alpha$ $\mathrm{ctg}\,\alpha$	β
0°	0,0000	0,0000	90°
1°	0,0175	0,0175	89°
2°	0,0349	0,0349	88°
3°	0,0523	0,0524	87°
4°	0,0698	0,0699	86°
5°	0,0872	0,0875	85°
6°	0,1045	0,1051	84°
7°	0,1219	0,1228	83°
8°	0,1392	0,1405	82°
9°	0,1564	0,1584	81°
10°	0,1736	0,1763	80°
11°	0,1908	0,1944	79°
12°	0,2079	0,2126	78°
13°	0,2250	0,2309	77°
14°	0,2419	0,2493	76°
15°	0,2588	0,2679	75°
16°	0,2756	0,2867	74°
17°	0,2924	0,3057	73°
18°	0,3090	0,3249	72°
19°	0,3256	0,3443	71°
20°	0,3420	0,3640	70°
21°	0,3584	0,3839	69°
22°	0,3746	0,4040	68°
23°	0,3907	0,4245	67°
24°	0,4067	0,4452	66°
25°	0,4226	0,4663	65°
26°	0,4384	0,4877	64°
27°	0,4540	0,5095	63°
28°	0,4695	0,5317	62°
29°	0,4848	0,5543	61°
30°	0,5000	0,5774	60°
31°	0,5150	0,6009	59°
32°	0,5299	0,6249	58°
33°	0,5446	0,6494	57°
34°	0,5592	0,6745	56°
35°	0,5736	0,7002	55°
36°	0,5878	0,7265	54°
37°	0,6018	0,7536	53°
38°	0,6157	0,7813	52°
39°	0,6293	0,8098	51°
40°	0,6428	0,8391	50°
41°	0,6561	0,8693	49°
42°	0,6691	0,9004	48°
43°	0,6820	0,9325	47°
44°	0,6947	0,9657	46°
45°	0,7071	1,0000	45°

α	$\sin\alpha$ $\cos\beta$	$\mathrm{tg}\,\alpha$ $\mathrm{ctg}\,\alpha$	β
46°	0,7193	1,0355	44°
47°	0,7314	1,0724	43°
48°	0,7431	1,1106	42°
49°	0,7547	1,1504	41°
50°	0,7660	1,1918	40°
51°	0,7771	1,2349	39°
52°	0,7880	1,2799	38°
53°	0,7986	1,3270	37°
54°	0,8090	1,3764	36°
55°	0,8192	1,4281	35°
56°	0,8290	1,4826	34°
57°	0,8387	1,5399	33°
58°	0,8480	1,6003	32°
59°	0,8572	1,6643	31°
60°	0,8660	1,7321	30°
61°	0,8746	1,8040	29°
62°	0,8829	1,8807	28°
63°	0,8910	1,9626	27°
64°	0,8988	2,0503	26°
65°	0,9063	2,1445	25°
66°	0,9135	2,2460	24°
67°	0,9205	2,3559	23°
68°	0,9272	2,4751	22°
69°	0,9336	2,6051	21°
70°	0,9397	2,7475	20°
71°	0,9455	2,9042	19°
72°	0,9511	3,0777	18°
73°	0,9563	3,2709	17°
74°	0,9613	3,4874	16°
75°	0,9659	3,7321	15°
76°	0,9703	4,0108	14°
77°	0,9744	4,3315	13°
78°	0,9781	4,7046	12°
79°	0,9816	5,1446	11°
80°	0,9848	5,6713	10°
81°	0,9877	6,3138	9°
82°	0,9903	7,1154	8°
83°	0,9925	8,1443	7°
84°	0,9945	9,5144	6°
85°	0,9962	11,4301	5°
86°	0,9976	14,3007	4°
87°	0,9986	19,0811	3°
88°	0,9994	28,6363	2°
89°	0,9998	57,2900	1°
90°	1,0000	-	0°